Definitionen und Formelsammlung – Für die Vorbereitung der Lineare Algebra Klausur I bei Prof. Karcher – Christoph Tornau – toffi@bigfoot.de – Alle Angaben wie immer ohne Gewehr.

Definitionen von Mengen mit Verknüpfungen :

Version 2

Immer mehr Axiome gelten

Definition: Gruppe

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung + (+ : G x G → G) heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

G1: (a + b) + c = a + (b + c) ∀ a,b,c ∈ G (*Assoziativgesetz*)
G2: Es gibt ein e ∈ G (*neutrales Element*) das folgende Eigenschaften ∀ a ∈ G erfüllt:

1. e + a = a
2. Zu jedem a∈ G gibt es ein a'∈ G (*inverses Element*) mit a' + a = e

Definition: abelsche/kommutative Gruppe

Eine Gruppe heißt kommutativ, falls außerdem auch noch a + b = b + a ∀ a,b∈ G gilt (*Kommutativgesetz*)

Definition: Ring

Eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen (R,+,*)

+: R x R → R
*: R x R → R

heißt Ring, wenn folgendes gilt:

R1: R zusammen mit der Addition + ist eine abelsche/kommutative Gruppe
R2: (a*b)*c = a*(b*c) ∀ a,b,c∈ R (*Multiplikation (*) assoziativ*)
R3: Es gelten die Distributivgesetze
R3a: ∀ a,b,c ∈ R: (a + b) * c = a*c + b*c
R3b: ∀ a,b,c ∈ R: a*(b + c) = a*c + b *c

Definition: Ring mit 1

∃ 1 ∈ R (*neutrales Element / Einselement*) für das für ∀ a∈ R gilt:
1*a=a
Es gibt noch kein Kommutativgesetz

Definition: Kommutativer Ring

∀ a, b ∈ R: a * b = b * a (*Kommutativgesetz*)
Hier gibt es kein Einselement

Diese beiden Ringaxiome werden häufig zusammen genommen und heißen dann **Kommutativer Ring mit Einselement**

Definition: Schiefkörper

Die Kommutativität gilt hier nicht. Dafür gibt es aber Inverse bezüglich der Multiplikation:

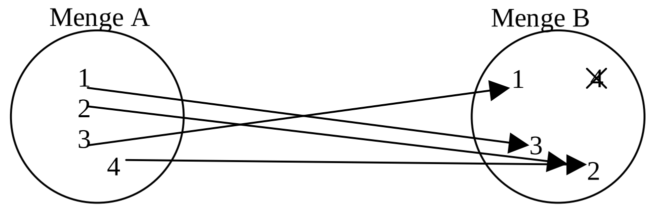
∀ a ∈ R ∃ a^{-1}, so daß gilt: a * a^{-1} = 1

Definition: Körper

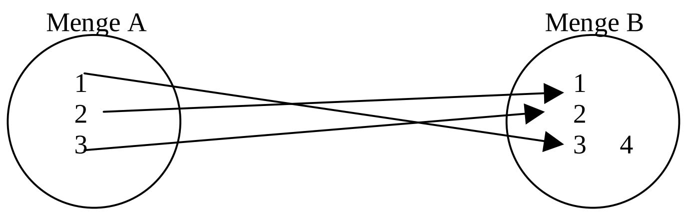
Die Menge K ist ein Körper, wenn es ein Ring ist, indem das 1-Element vorkommt, indem das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt, in dem es Inverse der Multiplikation gibt und indem es das neutrale Element bezüglich der Multiplikation gibt.

Surjektiv, Injektiv und Bijektiv:

Definition: Surjektiv
Sei die Abbildung f: V → W surjektiv
$\forall$ w$\in$ W $\exists$ v $\in$ V, so daß f(v)=w
(*jedes Element wird getroffen*)

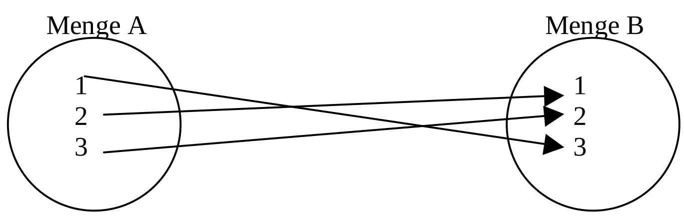


Definition: Injektiv
Eine Abbildung f: V → W ist injektiv
f(x)=f(y) <=> x=y
x $\neq$ y <=> f(x) $\neq$ f(y)
(*jedes Element wird nur einmal getroffen, es darf Elemente geben, die gar nicht getroffen werden*)



Definition: Bijektiv

Surjektiv und Injektiv



Abbildungen / Homomorphismen :

Definition: Linear / (Genauer K-Linear oder Homomorphismus von Vektorräumen)

Sei f eine Abbildung f: V → W V, W sind Vektorräume über demselben Körper K. Gilt für $\forall$x,y $\in$ V und r $\in$ K:

f(rx+y) = rf(x) + f(y)

so heißt f *linear*.

Definition: Gruppenhomomorphismus

Sei f eine Abbildung f: G → H G,H sind Gruppen und es existieren die Verknüpfungen $*_G$ und $*_H$ auf G und H .Gilt für $\forall$ a,b$\in$ G

$f(a *_G b)=f(a) *_H f(b)$

so ist f ein Gruppenhomomorphismus

Definition: Ringhomomorphismus

Sei f eine Abbildung f: V → W   V,W sind Ringe und es existieren die Verknüpfungen $*_V$ $+_V$ auf V und $*_W$ $+_W$ auf W.

Gilt für ∀ a,b∈ V

$f(a *_V b) = f(a) *_W f(b)$

$f(a +_V b) = f(a) +_W f(b)$

so ist f ein Ringhomomorphismus

F eine lineare Abbildung V → W ; V,W sind Vektorräume
Isomorphismus, wenn F bijektiv ist.
Endomorphismus, wenn V=W
Automorphismus, wenn V=W und F bijektiv ist.

Untergruppe und Untervektorraum :

Definition: Untergruppe
Sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung + und G'⊂ G eine Teilmenge. G' heißt Untergruppe, wenn für ∀ a,b∈ G' gilt:
a+b ∈ G' (*abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung* +)
a^{-1}∈ G' (*inverses Element vorhanden*)

Definition: Untervektorraum
Sei V ein K-Vektorraum und W ⊂ V eine Teilmenge. W heißt Untervektorraum von V falls folgendes gilt:

UV1: W ≠ ∅
UV2: ∀ v, w ∈ W ➔ v + w ∈ W (*abgeschlossen gegenüber der Addition*)
UV3: v ∈ W, λ ∈ K ➔ λV ∈ W (*abgeschlossen gegenüber der Multiplikation mit Skalaren*)

Der Nullvektor ist in jedem Untervektorraum vorhanden.
Zu jedem v gibt es ein –v ∈ W
Jeder UVR hat zwei Untervektorräume: Einmal sich selbst und einmal {0}, wobei der Untervektorraum {0} natürlich nur einen Untervektorraum, nämlich sich selbst hat.

Definitionen in Hinsicht auf Vektorraum :

Definition: Linear unabhängig
Sei V ein K- Vektorraum. Eine endliche Familie $(v_1,v_2,...v_r)$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1,..., \lambda_k \in$ K und ist
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$
so folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$
Anders ausgedrückt, sind die Vektoren linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur trivial aus den $v_1,v_2,...v_r$ kombinieren läßt.

Definition: Linear unabhängig
Sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $(v_1,v_2,...v_r)$ von Vektoren aus V heißt linear abhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1,..., \lambda_k \in$ K und ist
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$
so folgt: Es gibt $\lambda_k \neq 0$, so daß diese Gleichung auf nichttriviale Weise erfüllt wird.

Definition: Vektorraum
Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit den Verknüpfungen + und *
+: V x V → V
*: R x V →
wird Vektorraum genannt, wenn folgendes gilt:
(V,+) sei eine abelsche Gruppe
S1: $\lambda,\mu \in K, v \in V$ $\lambda*(\mu*v) = (\lambda*\mu)*v$ (*assoziativ*)
S2: $1 \in K: \forall v \in V : 1 * v = v$ (*neutrales Element*)
D1: $(\lambda*\mu)*v = \lambda*v + \mu*v$ (*distributiv*)
D2: $\lambda*(v+w) = \lambda*v + \mu*v$ (“)

Definition: Span

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $v_1, v_2, ... v_n \in V$. Jeder Vektor der Form
$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$
in V mit $a_i \in K$ heißt Linearkombination von $v_1, v_2, ... v_n$. Die Menge solcher Linearkombinationen bezeichnet durch
span $(v_1, v_2, ... v_n)$
heißt lineare Hülle oder Span von $v_1, v_2, ... v_n$. Die Vektoren sind nicht zwingend linear unabhängig.

Definition: Erzeugendensystem
Die Vektoren $\{v_1, v_2, ... v_n\}$ heißen Erzeugendensystem von V, wenn sie den Vektorraum ganz aufspannen:

$V = \text{span}\ \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Tipp: Die Vektoren müssen nicht linear unabhängig sein, jedoch müssen mindestens dim V zueinander linear unabhängige Vektoren vorhanden sein, damit sie den Vektorraum aufspannen können. Die anderen sind dann noch so Just for Fun dabei.

Definition: Basis
Die linear unabhängigen Vektoren $\{v_1, v_2, ... v_n\}$ heißen Basis von V, wenn sie den Vektorraum ganz aufspannen:

$V = \text{span}\ \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Es müssen dim V linear unabhängige Vektoren vorhanden sein. (Kriterium für Basis)

Definition: Kern
Sei f: V → W; V, W sind Vektorräume

Kern (f) = $\{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Definition: Bild
Sei f: V → W; V, W sind Vektorräume

Bild (f) = f(V) = $\{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\}$

Satz: Basisergänzungssatz

In einem endlich erzeugten Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $w_1, ..., w_n$ gegeben. Dann kann man $w_{n+1}, ..., w_r$ finden, so daß

$B = \{ w_1, ..., w_n, w_{n+1}, ..., w_r \}$ eine Basis von V ist.

Definition: Dimension

Ist V ein K-Vektorraum, so definieren wir

$\dim_K V := \begin{cases} \infty, & \text{Falls V keine endliche Basis besitzt} \\ r, & \text{Falls V eine Basis der Länge r besitzt / Anzahl der Vektoren in der Basis} \end{cases}$

Bemerke: Alle Basen sind gleich lang

$\dim_K V$ heißt Dimension von V über K.

Definition: Rang

Ist F eine lineare Abbildung F:V → W, so ist

rang f := dim Bild F

Sätze auf Vektorräumen:

F ist injektiv <=> Ker (F) = 0

„=>“: Da F injektiv hat jedes Bild genau nur ein Urbild.
Urbild von 0 sei n <=> Ker(F) = {n} => F(n) = 0
Da F linear muß gelten F(x) + F(n) = F (x + n) <=> F(x) = F(x + n) => n=0
Also Ker (F) = 0

„<=“: Ker (F) = 0 <=> {v∈ V | F(v)=0}
Beweis der Injektivität $F(v_1)=F(v_2)$ <=> $F(v_1) – F(v_2) = 0$ <=> $F(v_1-v_2)=0$
Da Ker (F) = F(n) = F(0) = 0, sind somit $v_1=v_2$

L injektiv <=> linear unabhängig $\xrightarrow{L}$ linear unabhängig

„<=“ zz: L(v)=L(w) => ... => v = w

sei $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ Basis v,w ∈ V, die Basis ist linear unabhängig und auch $L(v_i)$ ist linear unabhängig

L(v)=L(w)
<=> $L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i)$
<=> $\sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i)$
=> $\sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0$
=> $\sum (\lambda i - \mu_i) v_i = 0$ => v=w

„=>“ zz: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$\sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i$
<=> $\sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i)$
=> $\sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0$
=> $\sum (\lambda_i - \mu_i) = 0$

Satz: Dimensionsatz

Sei f: V → W (V,W K-Vektorräume) eine lineare Abbildung. Dann gilt:

dim V = dim Bild (f) + dim Ker (f)

Anzahl der Elemente der Basis in V	Anzahl der Elemente der Basis des UVR des Bildes von f	Anzahl der Elemente der Basis des UVR des Kerns von f

(i) Da der Kern ein UVR von V ist, kann man die Basis $\{k_1,k_2,...,k_n\}$ des UVR des Kernes durch Hinzunahme von linear unabhängigen Vektoren zur Basis $\{k_1,k_2,...,k_n,v_{n+1},...v_k\}$ von V ergänzen. (Basisergänzungssatz)

(ii) 1. Wir lassen die lineare Abbildung auf den Basisvektoren von V laufen:

$$\text{Bild (f)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(k_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) \qquad \lambda_i,\mu_i \in K$$

2. $\sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i L(v_i) = 0 \Rightarrow Alle \quad \lambda_i = 0$, da keiner der Vektoren im Kern liegt. q.e.d.

Definition: Äqivalenzrelation

Eine Relation ♥auf X heißt Äqivalenzrelation, wenn für beliebige x,y,z $\in$ X gilt:

A1: x ♥ x (reflexiv)
A2: x ♥ y => y ♥ x (symmetrisch)
A3: x ♥ y und y ♥ z => x ♥ z (transitiv)

Definition: Skalarprodukt / Innenproduktraum

Eine Abbildung <,>: R^n x R^n → R, (x,y) → <x,y> heißt Skalarprodukt, wenn $\forall$ x,x',y $\in$ R^n folgendes gilt:

S1: <x+x',y> = <x,y> + <x',y> (*Linearität*)
S2: <x,y> = <y,x> (*Symmetrie*)
S3: <x,x> $\geq$ 0 und <x,x> = 0 => x=0 (*Postiv und definit*)

Definition: Norm

Eine Abbildung || ||: R^n→R_+ , heißt Norm, wenn folgende Axiome gelten

N1: ||x|| = 0 <=> x= 0
N2: ||λx|| = |λ| * ||x||
N3: ||x+y|| $\leq$ ||x||+||y||

z.B. ist x → ||x|| := $\sqrt{< x, x >}$ eine Norm.

Definition: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

|<x,y>| $\leq$ ||x|| * ||y||

Definition: Permutation

Eine Permutiation ρ der Menge {1,2,...,n} ist eine eindeutige bijektive Abbildung der Menge auf sich selbst oder entsprechend eine Umordnung der Zahlen 1,2,...,n.

Rechnen auf Matrixen:

Verfahren: Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}*b_{11}+a_{12}*b_{21}+a_{13}*b_{31} & a_{11}*b_{12}+a_{12}*b_{22}+a_{13}*b_{32} & a_{11}*b_{13}+a_{12}*b_{23}+a_{13}*b_{33} \\ a_{21}*b_{11}+a_{22}*b_{21}+a_{23}*b_{31} & a_{21}*b_{12}+a_{22}*b_{22}+a_{23}*b_{32} & a_{21}*b_{13}+a_{22}*b_{23}+a_{23}*b_{33} \\ a_{31}*b_{11}+a_{32}*b_{21}+a_{33}*b_{31} & a_{31}*b_{12}+a_{32}*b_{22}+a_{33}*b_{32} & a_{31}*b_{13}+a_{32}*b_{23}+a_{33}*b_{33} \end{pmatrix}$$

Verfahren: Determinantenbestimmung

Eine 2 x 2 Determinante folgendermaßen bestimmt werden):

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Verfahren: Determinantenbestimmung mit Hilfe von Laplace

Man wählt + und – schachbrettmusterartig.
Wenn wir das oberste linke Element betrachten, dann bekommt es ein +,
alle anderen folgen dann schachbrettmusterartig:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$-a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{a41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Dies kann man nun im nächsten Schritt weiterführen, bis man auf 2 x 2 Matrixen kommt. Von diesen kann man ganz einfach (oben beschrieben) Determinanten ausrechnen. Man kann auch Determinanten von 3 x 3 Matrixen so ausrechnen. Aber die Formel ist komplizierter und so lohnt es sich nicht diese auswendig zu lernen.

Gesetze zur Vereinfachung der Determinantenbestimmung

- Die Determinante einer Matrix und die ihrer Transponierten A^T sind gleich;das heißt det A = det A^T (*Eine Transponierte ist die Spieglung an der Diagonalen*)
- Wenn eine Zeile oder Spalte der Matrix aus Nullen besteht, so ist det A =0
- Wenn A zwei gleiche bzw. linear abhängige Zeilen (Spalten) besitzt, dann gilt ebenfalls det A = 0
- Wenn A eine Dreiecksmatrix ist, d.h. oberhalb und unterhalb der Diagonalen nur Nullen hat, dann ist det A gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

Definition: klassische Adjunkte (nicht so wichtig)

Für jeden Wert in der Matrix wird die Determinante der Matrix bestimmt, die entsteht, wenn man die Zeile und Spalte streicht, in der der Wert steht. Das Vorzeichen alterniert. Das ergibt dann eine neue Matrix gleichen Ausmaßes: (Beispiel für eine 3 x 3 Matrix)

$$adj\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{21}a_{33} - a_{31}a_{32} & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

<u>Verfahren:</u> Gram Schidtsches Orthogonalisierungsverfahren

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{\| w_1 \|^2} w_1$

$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{\| w_1 \|^2} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{\| w_2 \|^2} w_2$

....

$w_n = v_n - \frac{< v_n, w_1 >}{\| w_1 \|^2} w_1 - \frac{< v_n, w_2 >}{\| w_2 \|^2} w_2 - \frac{< v_n, w_3 >}{\| w_3 \|^2} w_3 - ... - \frac{< v_n, w_{n-1} >}{\| w_{n-1} \|^2} w_{n-1}$

Diagonalisierung:

<u>Definition:</u> Charakteristisches Polynom

$X_A(t) = \det(tI_n - A)$

A: Ausgangsmatrix
I: Identitätsmatrix

<u>Definition:</u> Eigenwert

Sei F ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Die Matrix zu diesem Endomorphismus sei A. Ein $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von F, wenn es ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt, so daß gilt

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

<u>Definition:</u> Eigenvektor

Sei F ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Die Matrix zu diesem Endomorphismus sei A. $\lambda \in K$ ist Eigenwert von F. Alle $v \in V$, $v \neq 0$ heißen Eigenvektoren, wenn gilt

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

<u>Definition</u>: Eigenraum

Die Menge E_λ aller Eigenvektoren, die zu λ gehören, ist ein Unterraum von K^n genannt *Eigenraum*.

<u>Satz:</u> Diagonalisierbar

Eine *n*-quadratische Matrix A ist einer Diagnoalmatrix D dann und nur dann ähnlich (A ist diagonalisierbar), wenn A *n* linear unabhängige Eigenvektoren hat.

<u>Verfahren:</u> Diagonalisierung

Die Eingabe ist eine *n*-quadratische Matrix A

Schritt 1: Ermittle das Charakteristische Polynom von A
Schritt 2: Ermittle die Nullstellen dieses Polynoms, um die Eigenwerte (λ) von A zu erhalten
Schritt 3: Wiederhole die folgenden Schritte für jeden Eigenwert

1. Bilde M= A-λid *(Der Eigenwert wird von allen Werten in der Diagonalen abgezogen. So erhält man M)*
2. Ermittle die Basis für die Lösungsmenge des homogenen Systems MX=0 *(Dies sind die linear unabhängigen Eigenvektoren von A)*

Schritt 4: Betrachte die Menge $S = \{v_1,...,v_m\}$ aller Eigenvektoren

1. Wenn dim S $\neq$ n, so ist die Matrix nicht diagonalisierbar.
2. Wenn dim S = n, dann ist P die Matrix deren Spalten die Eigenvektoren sind und

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$