Lernzusammenfassung für die Klausur

Hallo! In diesem Text habe ich die wichtigsten Dinge der Stochastikvorlesung zusammengefaßt, jedenfalls soweit, wie ich bis jetzt gekommen bin. Ich denke, dies wird Euch eine Hilfe in der Vorbereitung der Klausur sein, da die wichtigsten Dinge zusammengefaßt sind. Für Korrekturen an ctornau@yahoo.de oder an die Mailingliste bin ich sehr dankbar.

Christoph Tornau

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeiten

1.1 Definition

1.1.1 Mathematische Modellierung zufälliger Ereignisse

Ω ist die Menge der möglichen Ereignisse eines Zufallsexperimentes. Man kann eine Zufallsvariable X definieren, die zufällig einen Wert in Ω annimmt:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

1.1.2 Grundlegende Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Definition: Wahrscheinlichkeit Sei Ω die Menge der möglichen elementaren Ereignisse. Ein (nicht elementares) Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω: $A \subseteq \Omega$.
Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \Omega \to \mathbb{R}$ für die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jedes Ereignis A gilt $0 \leq \mathbb{P} \leq 1$
2. Für das sichere Ereignis $A = \Omega$ gilt $\mathbb{P}(A) = 1$
3. Für jede Folge von disjunkten Ereignissen A_n gilt $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

1.2 Wahrscheinlichkeitsräume

1.2.1 Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum Ω wird endlich oder abzählbar genannt. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist abzählbar.

1.2.2 Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Alle Ereignisse in Ω kommen gleichwahrscheinlich vor:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ und $|\Omega| = n$
LaPlace: $p_{\omega_1} = p_{\omega_2} = ... = p_{\omega_n}$
Hierraus läßt sich des weiteren schließen, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $\mathbb{P}_i = \frac{1}{n}$ beträgt, da die Wahrscheinlichkeit für das totale Ereignis $\mathbb{P} = 1$ ist.
Beispiel: Würfelexperiment: Ein Würfel hat 6 Seiten. Es ist für jede Seite gleichwahrscheinlich, daß sie nach dem Wurf nach oben zeigt. (Wir setzen in diesem Beispiel einen Würfel heraus, der nicht manipuliert worden ist.) Somit gilt für die elementaren Ereignisse:

$$p_{\omega_1} = p_{\omega_2} = p_{\omega_3} = p_{\omega_4} = p_{\omega_5} = p_{\omega_6} = \frac{1}{6}$$

Wir können nun auch andere Ereignisse definieren. Zum Beispiel:

$$\mathbb{P}(Gerade\,Augenzahl) = p_{\omega_2} + p_{\omega_4} + p_{\omega_6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

oder

$$\mathbb{P}(Augenzahl\,durch\,drei\,teilbar) = p_{\omega_3} + p_{\omega_6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ebenso können diese beiden Ereignisse verknüpft werden. Hierbei ist jedoch darauf zu achten, daß das elementare Ereignis, daß die 6 vorkommt, in beiden Ereignissen enthalten ist:

$$A(Gerade\,Augenanzahl) \cup A(Augenzahl\,durch\,drei\,teilbar) = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_3\}$$

$$\mathbb{P}(Gerade\,Augenanzahl \cup Augenzahl\,durch\,drei\,teilbar) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir sehen hier, daß sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A auch wie folgt berechnen läßt:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Anzahl\,der\,günstigen\,Ereignisse}{Anzahl\,der\,möglichen\,Ereignisse}$$

Es ist manchmal von enormer Bedeutung die richtige Modellierung des Experimentes zu finden. Beispielsweise kann man das Zufallsexperiment „Augenzahl zweier Würfel” mit dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ modelieren. Dies ist allerdings ungeschickt, da die einzelnen Augenzahlen unterschiedlich häufig gewürfelt werden. Zum Beispiel wird die 12 nur durch zwei Sechsen gewürfelt. Die 7 kann man jedoch durch (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2) und (6,1) erzeugen. Somit wird die 7 häufiger gewürfelt, als die 12, da jeder Würfel selbst Laplace-verteilt ist. Es ist also günstiger ein Modell wie folgt zu wählen:

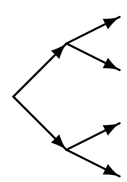
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Nun ist für jedes Ereignis die Wahscheinlichkeit wieder gleich hoch, nämlich $\frac{1}{36}$.

1.3 Mehrstufige Wahrscheinlichkeitsexperimente (Produktwahrscheinlichkeiten)

1.3.1 Wahrscheinlichkeitsbäume

Wahrscheinlichkeitsbäume sehen wie folgt aus. An jedem Ast steht eine Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit, mit der das am Astende erzeugte Ereignis eintritt wird durch Multilikation der einzelnen „Astwahrscheinlichkeiten” berechnet.



1.3.2 Das Ziegenproblem

Das Ziegenproblem ist nach eine Fernsehshow benannt. Bei dieser gibt es drei Türen, hinter denen der Showmaster bei einer Tür einen Preis versteckt. Hinter den anderen beiden Türen jedoch keinen, sondern eine Ziege. Nun darf der Kandidat eine Tür wählen, die er öffnen will. Danach öffnet der Showmaster eine Tür mit einer Ziege. Nun hat der Kandidat die Möglichkeit seine Entscheidung noch einmal zu wiederholen und die Tür zu wechseln oder beizubehalten. Erstaunlicherweise ergibt sich eine Trefferwahrscheinlichkeit für den Gewinn von $\frac{2}{3}$, wenn der Kandidat grundsätzlich wechselt. Siehe hierzu auch:
http://www.phiba.de/Divers/ziege.htm

1.3.3 Unendliche Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen

Wenn man unendlich viele Zufallsexperimente machen möchte, dann ist der Baum unendlich lang. Es muß jedoch auch sichergestellt sein, daß wir jede Wahrscheinlichkeit in diesem Baum berechnen können, so daß wir sie zusammen multiplizieren können. Berechenbar sind somit nur Erereignisse, die abzählbar unendlich sind und die man mit einer Folge approximieren kann.

1.4 Satz von Bayes

kommt später, vielleicht auch nie, ist aber für die Klausur zu lernen.

2 Urnenmodelle (Kombinatorik)

2.1 Übersicht über die einzelnen Urnenmodelle

n Elemente k Ziehungen	Reihenfolge wichtig	Reihenfolge unwichtig
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * ... * (n-k+1)$ Sonderfall n=k: $n!$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{n}$

2.2 Anordnung unterschiedliche Dinge

n Dinge, von denen jeweils $n_1, n_2, ...n_r$ gleich sind, lassen sich auf

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_r!} =: \binom{n}{n_1, n_2, ...n_r}$$

Weise anordnen. *Siehe hierzu auch Polynomialverteilung*

2.3 Zwei Urnenmodelle für Wahrscheinlichkeiten

2.3.1 Ohne Zurücklegen

Die Wahrscheinlichkeit, daß wir bei n maligem Ziehen k Kugeln von der ersten Sorte, von denen es M Stück gibt, und n-k von der zweiten Sorte, von denen es N-M gibt (wobei N die Gesamtanzahl der Kugeln) gezogen haben ist:

$$\mathbb{P}_{k\, Kugeln\, erste\, Sorte\, und\, n-k\, Kugeln\, zweite\, Sorte} =$$

$$\frac{Mögliche\, Ziehungen\, erste\, Sorte * Mögliche\, Ziehungen\, zweite\, Sorte}{Mögliche\, Ziehungen\, insgesamt} = \frac{\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Beispiel für ein solches Urnenmodell ist eine Produktion bei der M Stücke kaputt sind und man nach der Wahrscheinlichkeit fragt, daß k der n gezogenen Stücke defekt sind. *Siehe hierzu auch Binominalverteilung*

2.3.2 Mit Zurücklegen

Wenn wir aus n Dingen ziehen, und k-Mal ein besonderes Ding ziehen wollen (z.B. die auf einem Kartenstapel oben liegende Karte ist ein Ass) und wenn wir alle Ziehungen immer wieder zurücklegen, so ergibt sich daraus:

$$\mathbb{P}_{k\,mal\,Erfolg} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2.4 Bernoilli-Experiment

Ein Bernoilli-Experiment ist ein Experiment bei dem ein Zufallsexperiment mit gleichen Bedingungen öfters wiederholt wird.

3 Diskrete Zufallsvariable

3.1 Verteilungen

3.1.1 Polynomialverteilung

Ein Versuch wird n-mal durchgeführt. Dabei sind $p_1, p_2, ..., p_r$ die Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_r$. Eines dieser Ereignisse muß immer eintreten. Wir können nun die Gesamtwahrscheinlichkeit für eine vorgegebene Häufigkeit der Ereignisse berechnen. Dabei sind $n_1, n_2, ..., n_r$ die gewünschten Häufigkeiten der Ereignisse:

$$\mathbb{P}_{n_1,n_2,...,n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_r!} * p_1^{n_1} * p_2^{n_2} * ... * p_r^{n_r}$$

3.1.2 Geometrische Verteilung

Wird ein Zufallsexperiment solange wiederholt, bis ein Erfolg eintritt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß beim genau k-ten Versuch der Erfolg eintritt:

$$\mathbb{P}_{Genau\,beim\,k-ten\,Versuch\,Erfolg} = p * (1-p)^{k-1}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Versuchen ein oder mehrere Erfolge eingetreten sind, ist gegeben durch:

$$\mathbb{P}_{Nach\,n\,Versuchen\,Erfolg\,gehabt} = \sum_{k=1}^{n} p * (1-p)^{k-1}$$

3.1.3 Binominalverteilung

Wenn bei n Versuchen genau k-mal der Erfolg eintreten soll, so ist die Wahrscheinlichkeit hierfür:

$$\mathbb{P}_{Genau\,k\,mal\,Erfolg} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dabei wird immer zurückgelegt.

3.1.4 Poissonverteilung

Bei der Binominalverteilung geraten wir bei großen n in Probleme. Wir können die Werte nur mühsam ausrechnen. Hierbei hilft die Poissonverteilung als Approximation. Sie läuft darüber, daß bei kleinen Wahrscheinlichkeiten $(1 - p = \frac{\lambda}{n})$ und großen Versuchsanzahlen n folgendes gilt:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$$

Wenn nun $n = 2000$ und $p = 0,001$, so erhalten wir als Binominalverteilung

$$P(X = k) = \binom{2000}{k}(0,001)^k \cdot (1 - 0,001)^{2000-k}$$

Somit gilt für $k = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{2000}{0}(0,001)^0 \cdot (1 - 0,001)^{2000-0} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot (1 - \frac{2}{2000})^{2000} \approx e^{-2} \approx 0,135$$

Um Werte für $k > 0$ zu erhalten, wenden wir eine Rekursionsformel an:

$$P(X = k + 1) = \frac{(n - k) \cdot p}{(k + 1) \cdot (1 - p)} \cdot P(X = k)$$

Somit gilt:

$$P(X = 1) = \frac{(2000 - 0) \cdot 0,001}{(0 + 1) \cdot 0,999} \cdot 0,135 = 0,27$$

3.2 Erwartungswert

Der Erwartungswert von X ist

$$EX = E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

Wobei $X(\omega)$ die Gewinne und $\mathbb{P}(\omega)$ die Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne.
Falls $E(X) = \infty$ so sagt man, daß der Erwartungswert nicht exisitert.

3.3 Varianz

Für die Varianz σ^2 einer diskreten Zufallsvariable gilt die Beziehung

$$Var(x) = \sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

$$= \sum_{i}^{n} {x_i}^2 P(X = x_i) - \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$

Wobei $\mu = \mathbb{E}(X)$.

3.4 Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die Quadradwurzel aus der Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

3.5 Kovarianz

Die Kovarianz ist wie folgt definiert:

$$Kov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

4 Stetige Zufallsvariable

4.1 Dichte